

高等学校【数 学】正解・解答例

1

- (1) A 不名誉 B 勤務時間 C 任命権者
 (2) ウ (3) ③
 (4) ① イ ② エ ③ ア ④ サ ⑤ コ

配点：各2点×10

20点

2

- (1) $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi \leq \theta \leq \frac{11}{6}\pi$ (完答)
 (2) ① 162.5 ② 164.1 (完答)
 (3) $a < -4$ (4) $\frac{2}{3}$
 (5) ① $t \geq 2$
 ② $x = 1 - \log_2 3, \log_2 3 - 1$
 (6) ① 2 ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{2}{5}$

配点：(1)～(4)各10点×4、(5)・(6)各5点×6

70点

3

(1) $\vec{OP} = \frac{3}{10}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

(2)

点 Q は直線 OP 上にあるから $\vec{OQ} = k\vec{OP}$ (k は実数) とすると

$$\vec{OQ} = \frac{3}{10}k\vec{a} + \frac{1}{5}k\vec{b} + \frac{1}{3}k\vec{c}$$

点 Q は平面 ABC 上にあるから

$$\frac{3}{10}k + \frac{1}{5}k + \frac{1}{3}k = 1$$

これを解いて $k = \frac{6}{5}$

よって $\vec{OQ} = \frac{9}{25}\vec{a} + \frac{6}{25}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$

(3)

点 R は直線 AQ 上にあるから $\overrightarrow{AR} = l\overrightarrow{AQ}$ (l は実数) とすると

$$\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA} = l(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OR} = (1-l)\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OQ}$$

$$= \left(1 - \frac{16}{25}l\right)\vec{a} + \frac{6}{25}l\vec{b} + \frac{2}{5}l\vec{c}$$

点 R は平面 OBC 上にあるから

$$1 - \frac{16}{25}l = 0$$

$$\text{これを解いて } l = \frac{25}{16}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OR} = \frac{3}{8}\vec{b} + \frac{5}{8}\vec{c}$$

$$\text{これより } BR : RC = 5 : 3$$

$$\text{また } AQ : QR = 16 : 9$$

$$(2) \text{ より } OP : PQ = 5 : 1$$

四面体 PQRC の体積を S、四面体 OABC の体積を T とすると

$$S = \frac{3}{8} \times \frac{9}{25} \times \frac{1}{6} \times T$$

$$= \frac{9}{400}T$$

よって 四面体 PQRC の体積は四面体 OABC の体積の $\frac{9}{400}$ 倍

配点 : (1) 10 点、(2)・(3) 各 15 点 × 2

40 点

4

(1)

直線 l の方程式は $y = m(x+2)$

直線 l と放物線 C が異なる2点で交わる時

$$x^2 - 3 = m(x+2)$$

が異なる2つの実数解を持つ。

$$x^2 - mx - 2m - 3 = 0 \text{ の判別式を } D \text{ とすると } D > 0$$

$$D = (-m)^2 - 4(-2m - 3)$$

$$= m^2 + 8m + 12$$

$$= (m+2)(m+6) > 0$$

$$\text{よって } m < -6, -2 < m$$

(2)

点 P、Q の x 座標を α 、 β とすると

α 、 β は方程式 $x^2 - mx - 2m - 3 = 0$ の解であるから
解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = m$$

$$\text{点 M の x 座標は } x = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{m}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{y 座標は } y = \frac{m(\alpha + 2) + m(\beta + 2)}{2} = \frac{m(\alpha + \beta) + 4m}{2} = \frac{m^2 + 4m}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } m = 2x$$

$$\textcircled{2} \text{ に代入して } y = \frac{(2x)^2 + 8x}{2} = 2x^2 + 4x$$

(1) より $2x < -6$ 、 $-2 < 2x$ であるから
求める軌跡は

放物線 $y = 2x^2 + 4x$ の $x < -3$ 、 $-1 < x$ の部分

配点：各 15 点 $\times$ 2

30 点

5

$$(1) \quad \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + C, \quad \frac{1}{12} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta + C$$

(2)

$x = 2(\theta - \sin \theta)$ 、 $y = 2(1 - \cos \theta)$ より

曲線上の $\theta = \frac{3}{2} \pi$ に対応する点 A の座標は $(3\pi + 2, 2)$

x と y を θ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta} = 2(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2 \sin \theta$$

であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

これより、曲線上の $\theta = \frac{3}{2} \pi$ に対応する点 A における接線 l の傾きは -1 である。

よって 求める接線 l の方程式は

$$y - 2 = -(x - (3\pi + 2))$$

$$y = -x + 3\pi + 4$$

(3)

$$V = \frac{4\pi \times 2}{3} - \int_{3\pi+2}^{4\pi} \pi y^2 dx$$

ここで $x = 2(\theta - \sin \theta)$ より、 $\frac{dx}{d\theta} = 2(1 - \cos \theta)$

x と θ の対応は下のようになる。

x	$3\pi+2 \rightarrow 4\pi$
θ	$\frac{3}{2}\pi \rightarrow 2\pi$

また $\frac{3}{2}\pi = \alpha$ 、 $2\pi = \beta$ とする。

$$\begin{aligned} \int_{3\pi+2}^{4\pi} y^2 dx &= \int_{\alpha}^{\beta} 4(1 - \cos \theta)^2 \times 2(1 - \cos \theta) d\theta \\ &= 8 \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos \theta)^3 d\theta \\ &= 8 \int_{\alpha}^{\beta} (1 - 3\cos \theta + 3\cos^2 \theta - \cos^3 \theta) d\theta \\ &= 8 \left[\theta - 3\sin \theta + \frac{3}{2}\theta + \frac{3}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{12}\sin 3\theta - \frac{3}{4}\sin \theta \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= 8 \left[\frac{5}{2}\theta - \frac{15}{4}\sin \theta + \frac{3}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{12}\sin 3\theta \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= 10\pi - \frac{88}{3} \end{aligned}$$

よって 求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{8}{3}\pi - \pi \left(10\pi - \frac{88}{3} \right) \\ &= 32\pi - 10\pi^2 \end{aligned}$$

配点： (1) 各5点×2、(2)・(3) 各15点×2

40点