

高等学校【数 学】正解・解答例

1

- (1) A 体罰 B 普通教育 C つかさどる
(2) イ (3) ⑤
(4) ① ウ ② サ ③ ケ ④ ア ⑤ キ

配点：各2点×10

20点

2

- (1) $\frac{21}{10}$ (2) $\frac{4\sqrt{6}}{15}$
(3) $4\sqrt{6}$ (4) $\frac{3}{2}$
(5) $-2 < a < 2$
(6) ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{32}$
(7) $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ (8) $5\sqrt{3} - 2$

配点：(1)～(5) 各10点×5、(6) 各5点×3、(7) 10点、(8) 10点

85点

3

$$(1) \quad 2n - 2k + 1$$

(2) 不等式 $|x| + |y| \leq n$ の表す領域は右図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。

直線 $x = k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 上の格子点の個数は

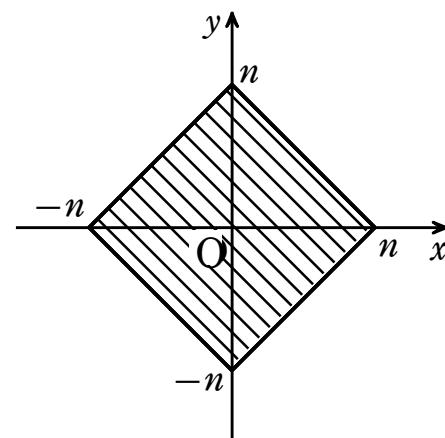
(1) より $2n - 2k + 1$ 個である。

直線 $x = -k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 上にも同様に $(2n - 2k + 1)$ 個あり、

y 軸上に $(2n + 1)$ 個ある。

よって、求める格子点の個数 a_n は

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \sum_{k=1}^n (2n - 2k + 1) + 2n + 1 \\ &= 2 \left\{ 2n^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n \right\} + 2n + 1 \\ &= 2n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$



$$(3) \quad b_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= \sum_{k=1}^n (2k^2 + 2k + 1)$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + n^2 + 2n$$

$$\frac{b_n}{n^3} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \quad \text{であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^3} = \frac{2}{3}$$

配点：(1) 5点、(2) 15点、(3) 10点

30点

$$(1) \quad \frac{13}{27}$$

$$(2) \quad \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3} \text{ より } \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned} (\cos \theta - \sin \theta)^2 &= \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2\left(-\frac{4}{9}\right) \\ &= \frac{17}{9} \end{aligned}$$

$$\cos \theta - \sin \theta = \pm \frac{\sqrt{17}}{3}$$

θ が第4象限の角であるから $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$ より $\cos \theta - \sin \theta > 0$

$$\cos \theta - \sin \theta = \frac{\sqrt{17}}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} \sin 2\theta + \cos 2\theta &= 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 2\left(-\frac{4}{9}\right) + (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \sin 2\theta + \cos 2\theta &= -\frac{8}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{17}}{3} \\ &= -\frac{8 - \sqrt{17}}{9} \end{aligned}$$

配点：(1) 10点、(2) 15点

25点

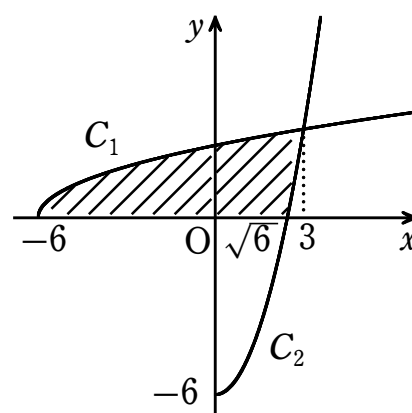
5

$$(1) \quad f^{-1}(x) = x^2 - 6 \quad (x \geq 0) \quad (2) \quad (3, 3)$$

$$(3) \quad f^{-1}(x) = 0 \quad (x \geq 0) \quad \text{のとき} \quad x = \sqrt{6}$$

求める面積 S は右の図の斜線部分の面積である。

$$\begin{aligned} S &= \int_{-6}^3 \sqrt{x+6} \, dx - \int_{\sqrt{6}}^3 (x^2 - 6) \, dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x+6)\sqrt{x+6} \right]_{-6}^3 - \left[\frac{1}{3}x^3 - 6x \right]_{\sqrt{6}}^3 \\ &= 18 - (-9 + 4\sqrt{6}) \\ &= 27 - 4\sqrt{6} \end{aligned}$$



$$(4) \quad y = x^2 - 6 \quad \text{と} \quad x \text{ 軸に関して対称な曲線は} \quad y = -x^2 + 6$$

求める体積 V は、右の図の斜線部分の領域を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積に等しい。

$y = x$ と $y = -x^2 + 6$ の共有点の x 座標は

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x \geq 0 \quad \text{より} \quad x = 2$$

よって、

$$V = \pi \int_0^2 (-x^2 + 6)^2 \, dx + \pi \int_2^3 x^2 \, dx - \pi \int_{\sqrt{6}}^3 (x^2 - 6)^2 \, dx$$

$$\text{いま} \quad \int_0^2 (-x^2 + 6)^2 \, dx = \int_0^2 (x^4 - 12x^2 + 36) \, dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 36x \right]_0^2 = \frac{232}{5}$$

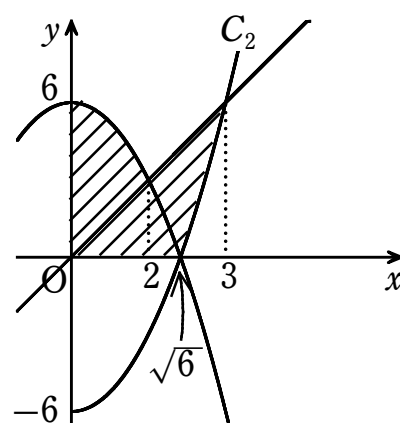
$$\int_2^3 x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_2^3 = \frac{19}{3}$$

$$\int_{\sqrt{6}}^3 (x^2 - 6)^2 \, dx = \int_{\sqrt{6}}^3 (x^4 - 12x^2 + 36) \, dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 36x \right]_{\sqrt{6}}^3 = \frac{243}{5} - \frac{96\sqrt{6}}{5}$$

よって

$$V = \left(\frac{232}{5} + \frac{19}{3} - \frac{243}{5} + \frac{96\sqrt{6}}{5} \right) \pi$$

$$= \left(\frac{62}{15} + \frac{96\sqrt{6}}{5} \right) \pi$$



配点：(1) 5点、(2) 5点、(3) 10点、(4) 20点

40点